

Approfondimento: Segno di un polinomio

Studiare il segno di un polinomio

Studiare il segno di un polinomio $P = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ significa determinare per quali valori di x si ha:

- $P = 0$
- $P < 0$
- $P > 0$

Se il polinomio è di grado superiore al secondo è necessario, se possibile, scomporlo in fattori di 1° e 2° grado per poter utilizzare i procedimenti già noti per lo studio del segno di polinomi del tipo $y = mx + p$ e $y = ax^2 + bx + c$.

Primo esempio

Studiare il segno del polinomio

$$P = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Per scomporre il polinomio in fattori cerco prima di tutto le soluzioni intere dell'equazione $P = 0$, che si trovano fra i divisori di 2, perciò possono essere: 1, -1, 2, -2. Sostituisco ad x questi numeri e trovo:

- se sostituisco $x = 1$, ottengo $y = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$, così trovo la soluzione $x_1 = 1$;
- se sostituisco $x = -1$, ottengo $y = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$, così trovo la soluzione $x_2 = -1$;
- se sostituisco $x = 2$, ottengo $y = 8 - 8 - 2 + 2 = 0$, così trovo la soluzione $x_3 = 2$.

Il polinomio è allora divisibile per $(x - 1)$ e per $(x + 1)$ e quindi anche per $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ ed è anche divisibile per $(x - 2)$, così scrivo il polinomio scomposto in fattori di 1° e 2° grado:

$$P = (x - 2)(x^2 - 1)$$

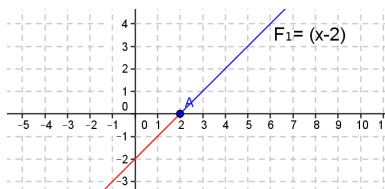
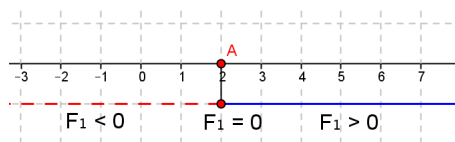
Per studiare il segno di P basta studiare il segno dei suoi fattori $F_1 = (x - 2)$ e $F_2 = (x^2 - 1)$.

La regola dei segni di un prodotto $P = F_1 \cdot F_2$ stabilisce infatti che risulta:

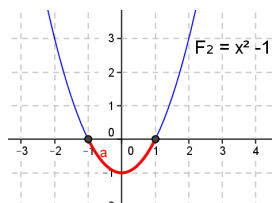
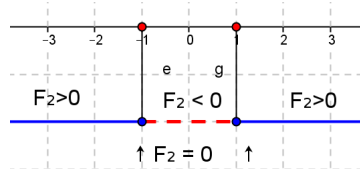
- $P < 0$ se F_1 e F_2 hanno segno discorde
- $P > 0$ se F_1 e F_2 hanno segno concorde
- $P = 0$ se $F_1 = 0$ o $F_2 = 0$

Ecco i passi da seguire per concludere il procedimento:

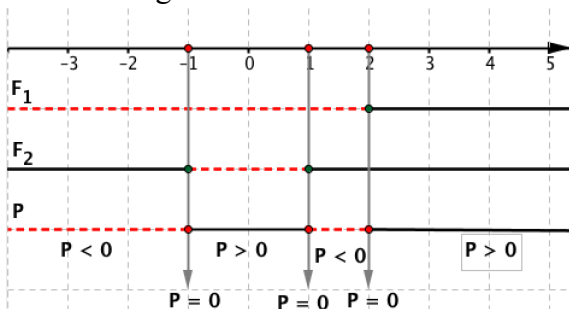
1. Studio il segno di $F_1 = (x - 2)$ analizzando il grafico riportato



2. Studio il segno di $F_2 = (x^2 - 1)$ analizzando il grafico riportato



3. Riunisco gli schemi sintetici in un unico schema per determinare il segno del polinomio.



In sintesi trovo

$P = 0$ se $x = \pm 1$ oppure $x = 2$

$P > 0$ se $-1 < x < 1$ oppure $x > 2$

$P < 0$ se $x < -1$ oppure $1 < x < 2$

Il procedimento generale per determinare il segno di un polinomio

- 1) Si scompone il polinomio in fattori di primo e secondo grado
- 2) Si studia il segno di ciascun fattore
- 3) Si determina il segno del polinomio mediante la regola del segno di un prodotto P , determinato dal numero di fattori negativi:
 - a. $P < 0$ se ho un numero dispari di fattori negativi;
 - b. $P > 0$ se ho un numero pari di fattori negativi;
 - c. $P = 0$ se almeno un fattore è uguale a zero.

Secondo esempio

Ecco un esempio di polinomio con il segno particolarmente semplice da studiare.

$$P = x^3 - 12x^2 + 6x - 8$$

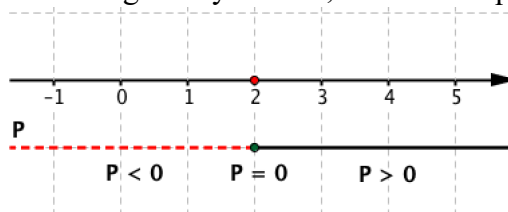
Per scomporre il polinomio in fattori ricordo il cubo di un binomio: $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$.

Perciò scrivo:

$$P = (x - 2)^3$$

E ora ricordo che una potenza di esponente dispari (3 in questo caso) ha lo stesso segno della base; esempio $(-2)^3 = -8$ e $2^3 = 8$

Così trovo che il polinomio ha lo stesso segno di $y = x - 2$, richiamato qui sotto.



Terzo esempio

Ecco un esempio di polinomio con il segno ancora più semplice da studiare.

$$P = x^4 - 2x^2 + 1$$

Per scomporre il polinomio in fattori ricordo il quadrato di un binomio: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Perciò scrivo:

$$P = (x^2 - 1)^2$$

E ora ricordo che una potenza di esponente pari (2 in questo caso) è sempre positiva e vale 0 solo se la base è 0.

Così concludo che

$$P = 0 \text{ solo se } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ oppure } x = 1$$

$$P > 0 \text{ per tutti gli altri valori reali di } x$$

ATTIVITA'

Studia il segno dei seguenti polinomi

1) $P = x^3 - 5x^2 + 4$

2) $P = x^4 - 5x^2 + 6$

3) $P = 4x^4 + 4x^2 + 1$

4) $P = x^3 + 8$

5) $P = x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 8x$